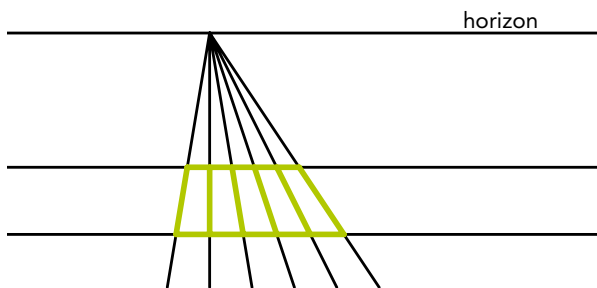


Het perspectieftekenen is deze jaargang een thema in *Pythagoras*. In de vorige afleveringen (november en februari) heb je kunnen lezen over evenwijdige lijnen en over afstanden in perspectief. Nu gaat het over vormen. Kun je aan een vierhoek in perspectief zien of het in het echt een rechthoek, vierkant, ruit, parallellogram of een gewone, niet-bijzondere vierhoek is?

■ door Jeanine Daems

VIERHOEKEN IN PERSPECTIEF



Figuur 1

4

In de vorige afleveringen hebben we gezien dat afstanden in perspectief meestal niet bewaard blijven. Ook hoeken veranderen natuurlijk: de meeste lijnen die in het echt evenwijdig lopen, lopen in een perspectieftekening naar elkaar toe (behalve als de lijnen ook nog evenwijdig lopen aan de denkbeeldige glasplaat, het tafereel).

Maar stel nu dat je een vierhoek ziet in perspectief, hoe kom je er dan achter of het een vierkant is of niet?

Kijk eens naar de perspectieftekening in figuur 1. De tekening stelt een begin van een tegelvloer voor die uit een heleboel dezelfde tegels bestaat. Alle lijnen lopen dus in het grondvlak.

Opdracht 1. Als de tegels vierkanten zijn, hoe hoog worden de tegels in de rij boven de getekende tegels dan? En als de tegels rechthoeken zijn?

Je ziet: voor het verder tekenen maakt het niet uit of de tegels rechthoeken of vierkanten zijn. Aan de

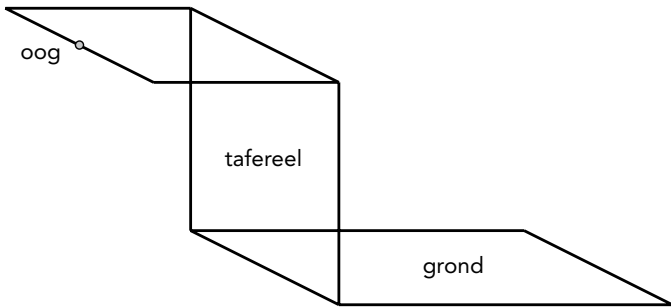
tekening zelf kun je eigenlijk niet meteen zien wat voor vierhoeken er op staan, het zouden zelfs nog parallellogrammen kunnen zijn. Het enige dat we kunnen zien, immers, is dat in deze vierhoeken de overstaande zijden evenwijdig lopen. Over de hoeken en lengtes van zijden weten we nog niets.

De belangrijkste vraag is dus: kun je op de een of andere manier aan een vierhoek in perspectief zien of het een vierkant is? Het – enigszins verrassende – antwoord is nee. Dat hangt namelijk af van het standpunt van de tekenaar, van de plaats van het oog. Het blijkt dat *elke* vierhoek in het grondvlak in een perspectieftekening in principe een vierkant zou kunnen voorstellen, vanuit een bepaald standpunt gezien.

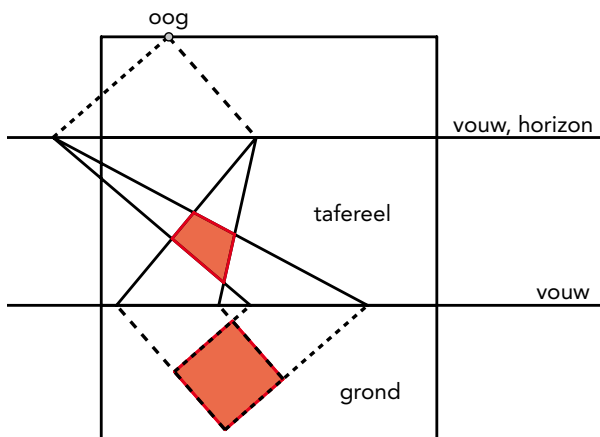
Als deze bewering je wat onwaarschijnlijk voorkomt, kun je het volgende eens proberen. Leg een vierkant (een vouwblaadje, bijvoorbeeld) plat op tafel. Maak nu van verschillende standpunten uit een foto. Probeer het vierkant als zoveel mogelijk verschillende vormen op de foto te krijgen.

EEN VIERHOEK IN HET DRIELUIK Om te begrijpen hoe elke vierhoek in perspectief in het echt een vierkant zou kunnen zijn, moeten we even terug naar het drieluik waarover het in aflevering 1 ging (zie figuur 2). Het middendeel van het drieluik is het tafereel, de perspectieftekening. Het onderste deel is het grondvlak, waar de figuur in het echt in ligt. Het bovenste deel is een vlak dat – als het drieluik niet uitgeklapt is – evenwijdig aan het grondvlak loopt. In dat vlak ligt het oog van de tekenaar.

Nu is de vraag hoe de figuur in het tafereel eruit kan zien als in het grondvlak een vierkant ligt. Fi-



Figuur 2



Figuur 3

guur 3 toont alvast een voorbeeld, waarbij het drieluik uitgeklapt is.

Wanneer is een vierhoek een vierkant? De definitie die meestal gebruikt wordt is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier rechte hoeken. Een probleem bij deze definitie voor ons is natuurlijk dat zowel lengtes als hoeken veranderen in een perspectieftekening. Maar wat betreft de hoeken komt het drieluik van pas: omdat de hoeken in het vierkant op de grond recht zijn, is de hoek tussen de twee lijnen die vanuit het oog vertrekken vanzelf ook 90° (die twee lijnen lopen immers evenwijdig aan de zijden van het vierkant).

Met rechte hoeken kunnen we dus wel iets in

perspectief: in het drieluik kunnen we ze herkennen. Niet in het tafereel, maar wel bij het oog. Maar wat betreft de zijdelengtes komen we zo niet verder.

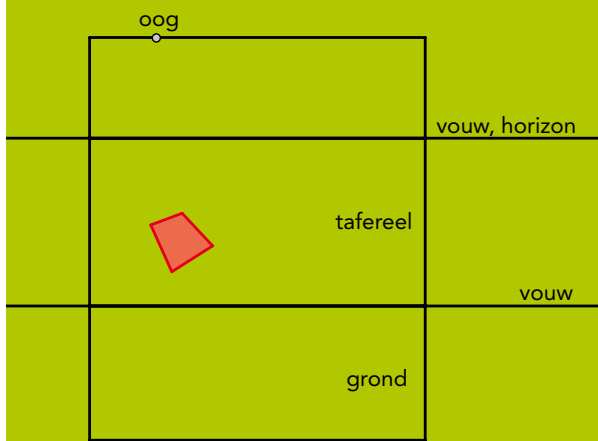
Opdracht 2. Teken een vierkant en een rechthoek en teken in allebei de figuren de beide diagonalen. Die diagonalen maken een hoek met elkaar. Wat kan de hoek tussen de diagonalen zijn bij een vierkant? En bij een rechthoek?

Gelukkig kunnen we een vierkant dus ook met behulp van alleen rechte hoeken definiëren! Een vierhoek is een vierkant als de vierhoek vier rechte hoeken heeft en de diagonalen loodrecht op elkaar staan. En dat zijn eisen die je wel allebei kunt controleren in het drieluik.

Opdracht 3. Bekijk figuur 4.

a. Teken de verdwijnpunten van de zijden van de vierhoek. Als je het netjes doet, hebben de overstaande zijden steeds hetzelfde verdwijnpunt op de horizon (zodat je al weet dat de overstaande zijden in werkelijkheid evenwijdig zijn).

b. Teken nu de lijnen van die twee verdwijnpunten naar het oog. Meet de hoek die die twee lijnen vormen. Is die hoek recht? Wat kun je



Figuur 4



daaruit concluderen over de vierhoek in werkelijkheid?

c. Teken in het tafereel de diagonalen van de vierhoek en hun verdwijnpunten op de horizon. Trek ook de lijnen van die twee verdwijnpunten naar het oog. Meet de hoek die die twee lijnen vormen. Is die hoek recht? Wat kun je daaruit concluderen over de vierhoek in werkelijkheid?

d. Reconstrueer de vierhoek in het grondvlak. Kijk goed in het voorbeeld (figuur 3) welke lijnen je moet tekenen om de zijden van de werkelijke vierhoek te kunnen vinden. Kloppen je antwoorden bij c en d?

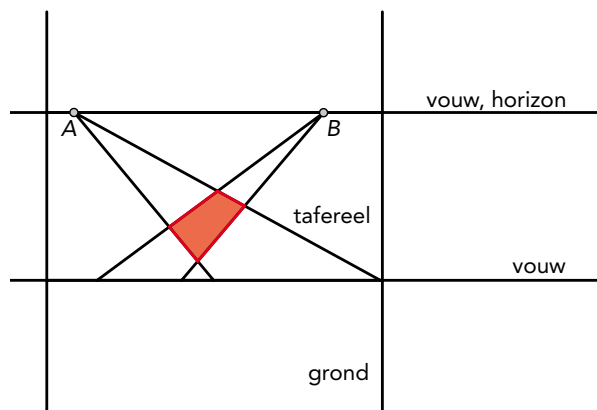
WAAR LIGT HET OOG? Onze oorspronkelijke vraag ging echter niet over een uitgeklapt drieluik, maar over de situatie dat je alleen een vierhoek in perspectief ziet (oftewel: het middelste deel van het drieluik). In de oplossing van het probleem hebben we opeens ook de andere delen gebruikt, in het bijzonder iets heel essentieels: de plaats van het oog. Maar als je alleen een perspectieftekening voor je neus hebt liggen, weet je helemaal niet waar het oog was toen de tekening op het tafereel geprojecteerd werd. En zonder verdere informatie kun je daar ook niet achter komen.

Het wonderbaarlijke is nu, dat we kunnen laten zien dat *elke* vierhoek in perspectief in het echt een vierkant *kan zijn*. Met andere woorden: bij zo'n perspectieftekening kun je altijd je oog zó houden, dat de vierhoek een vierkant lijkt. Bij elke vierhoek kunnen we dus een drieluik tekenen en een plek voor het oog vinden zodat de vierhoek vanuit die plek gezien een vierkant is.

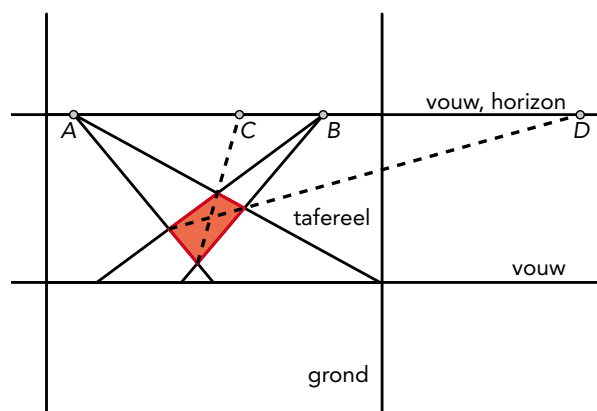
In het drieluik in figuur 5 staan een vierhoek en een horizon waaraan we kunnen zien dat aan één voorwaarde al voldaan is: de overstaande zijden van de vierhoek zijn in het echt evenwijdig (want ze hebben hetzelfde verdwijnpunt op de horizon).

De verdwijnpunten A en B zijn belangrijk. En ook de verdwijnpunten van de diagonalen van de vierhoek, C en D , hebben we dus nodig. Je ziet ze in figuur 6.

We gaan nu namelijk een plek zoeken voor het



Figuur 5

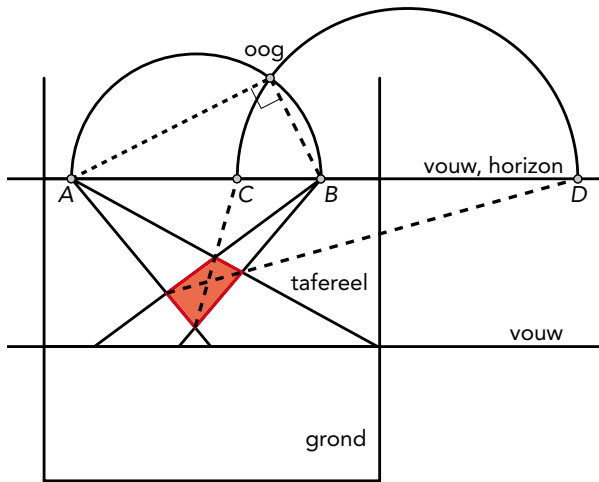


Figuur 6

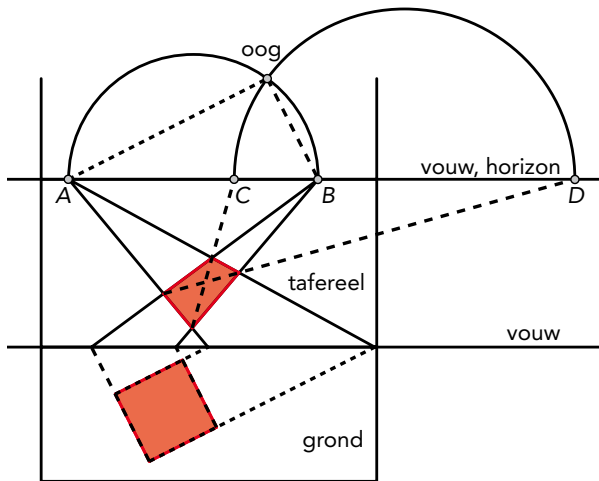
oog O , zodanig dat de lijnen AO en BO loodrecht op elkaar staan, en ook de lijnen CO en DO . Want als AO en BO loodrecht op elkaar staan, dan staan ook de zijden van onze vierhoek in werkelijkheid loodrecht op elkaar. En als dan ook nog lijnen CO en DO loodrecht op elkaar staan, staan ook de diagonalen van onze vierhoek loodrecht op elkaar. En dan is het dus een vierkant.

Bij het zoeken naar zo'n plek voor het oog gebruiken we de *stelling van Thales*: als AB een middellijn van een cirkel is en punt X een willekeurig punt op die cirkel, dan is hoek AXB een rechte hoek (zie ook pagina 26).

Het is dus handig om ons oog te zoeken op een



Figuur 7

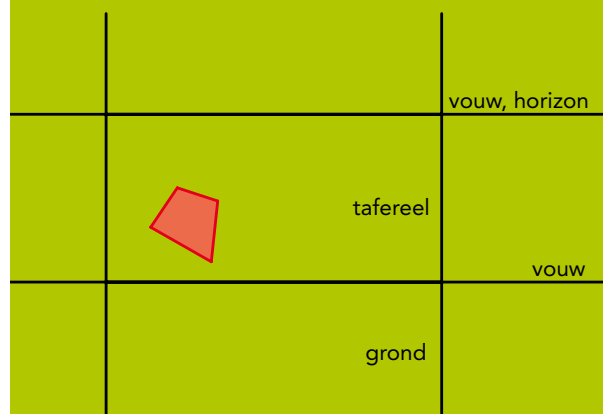


Figuur 8

halve cirkel die AB als middellijn heeft. Dan is de hoek AOB namelijk vanzelf recht volgens de stelling van Thales. En ons oog moet om dezelfde reden ook op de cirkel met CD als middellijn liggen! Nu ligt de plek voor het oog vast: het snijpunt van de beide halve cirkels boven de horizon (zie figuur 7). Vanuit die plek gezien, is de vierhoek in het tafereel een vierkant.

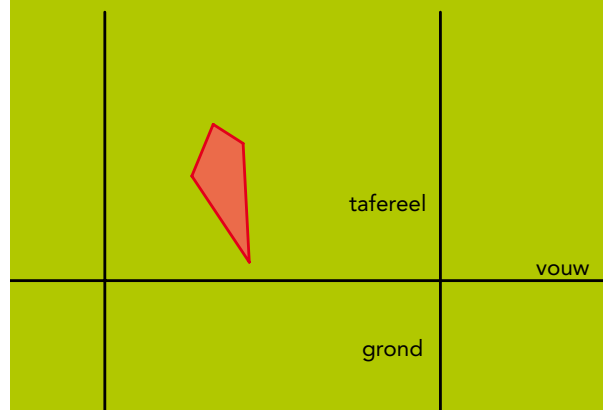
We controleren de plaats van het oog door de vierhoek in het grondvlak te reconstrueren (zie figuur 8). Denk eraan dat de lijnen in het grondvlak dus evenwijdig moeten lopen aan OA en OB , want die richtingen corresponderen met de zijden van het vierkant.

Opdracht 4. Construeer bij de vierhoek in figuur 9 het oog, zodanig dat de vierhoek op het grondvlak een vierkant is. Controleer je antwoord door de vierhoek in het grondvlak te reconstrueren.



Figuur 9

Opdracht 5. Construeer bij de vierhoek in figuur 10 het oog, zodanig dat de vierhoek op het grondvlak een vierkant is. Bedenk eerst hoe je er achter kunt komen waar de horizon moet liggen!



Figuur 10

TEGELVLOER Maar hoe moeten we nu te werk gaan bij de tegelvloer waarmee dit artikel begon? Stel dat de tegelvloer in figuur 1 uit vierkante te-

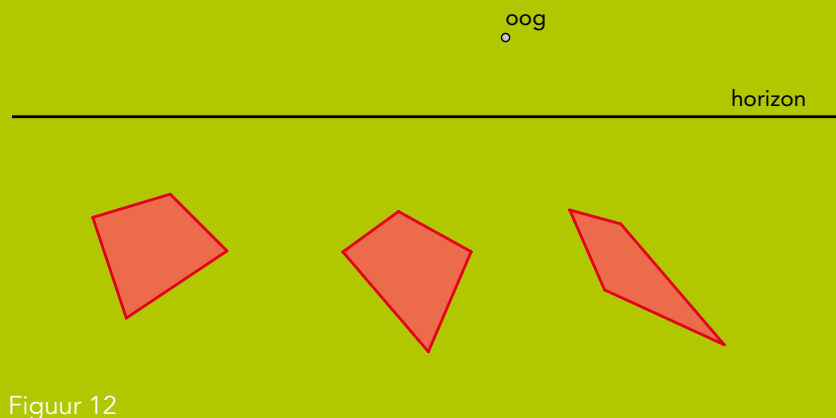
gels bestaat, waar zou dan het oog moeten liggen? Het antwoord ligt niet direct voor de hand: onze methode van zojuist loopt al snel mis. Omdat de bovenste en onderste lijn van elke vierhoek in het tafereel evenwijdig lopen, lukt het niet om een verdwijnpunt te vinden. En dat hadden we nou juist nodig om die cirkelboog van A naar B te kunnen tekenen. Nu is er echter geen punt A .

Laten we daarom eens kijken wat er gebeurt als de zijden van de vierhoek steeds evenwijdiger lopen (zie figuur 11). Je ziet dat naarmate de zijden meer dezelfde richting krijgen, het verdwijnpunt A verder naar links op de horizon terechtkomt (al snel ver buiten het plaatje). Op lijnstuk AB moeten we de halve cirkelboog tekenen. Je ziet dat die cirkelboog steeds groter wordt. De middellijn AB wordt tenslotte ook steeds groter.

Dat betekent dat die cirkelboog op AB in punt B eigenlijk steeds meer op een rechte lijn omhoog gaat lijken. Op het moment dat de zijden van de vierhoek in het tafereel echt horizontaal lopen, zoals in de tekening van de tegelvloer, ligt het oog dus recht boven punt B . En ook gewoon nog op die tweede cirkelboog op middellijn CD , natuurlijk. ■

Opdracht 6. Teken in figuur 1 de plaats van het oog als de tegelvloer uit vierkanten bestaat. Wat weet je van de plaats van het oog als de tegelvloer uit rechthoeken zou bestaan? (Antwoord op pagina 33.)

Opdracht 7. Figuur 12 toont een perspectieftekening van drie vierhoeken. De plek van het oog is al gegeven. Onderzoek welke vierhoeken je ziet. Kies uit: vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, trapezium of een niet-bijzondere vierhoek. Vul eerst onderstaand schema van eigenschappen in. (Antwoord op pagina 33.)



<i>vierhoek</i>	<i>overstaande zijden evenwijdig?</i>	<i>zijden loodrecht op elkaar?</i>	<i>diagonalen loodrecht op elkaar?</i>
trapezium	1 paar wel, 1 paar niet	nee	nee
parallellogram			
ruit			
rechthoek			
vierkant			
niet-bijzondere vierhoek	nee	nee	nee